

3.1 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΑΣ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

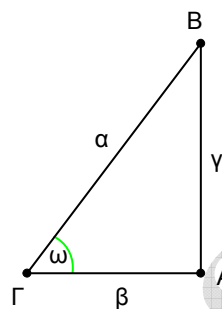
Για γωνία ω με $0^\circ < \omega < 90^\circ$

$$\eta\mu\omega = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\text{προσκεείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκεείμενη κάθετη}}$$

$$\sigma\phi\omega = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\text{προσκεείμενη κάθετη}}{\text{απέναντι κάθετη}}$$



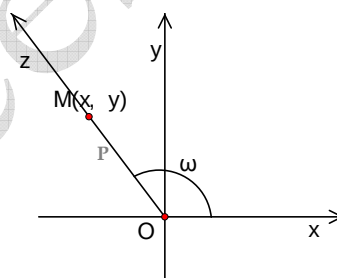
2.

Για γωνία ω με $0^\circ \leq \omega \leq 360^\circ$

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}, \quad \epsilon\phi\omega = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}, \quad \sigma\phi\omega = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$$



3.

Για γωνία ω αρνητική ή μεγαλύτερη των 360°

$$\eta\mu(k \cdot 360^\circ + \omega) = \eta\mu\omega, \quad \epsilon\phi(k \cdot 360^\circ + \omega) = \epsilon\phi\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu(k \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega, \quad \sigma\phi(k \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\phi\omega$$

4.

Τριγωνομετρικός κύκλος

Λέγεται ο κύκλος που έχει κέντρο την αρχή

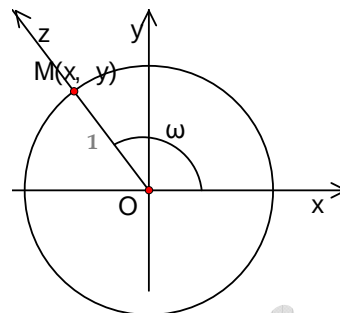
των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$.

$$\text{Οπότε} \quad \eta\mu\omega = y, \quad \epsilon\phi\omega = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0$$

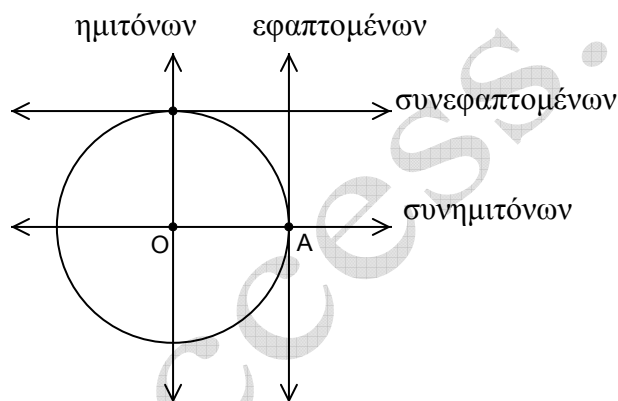
$$\sigma\upsilon\nu\omega = x, \quad \sigma\phi\omega = \frac{x}{y}, \quad y \neq 0$$

$$-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1, \quad -1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1$$

Η $\epsilon\phi\omega$ και η $\sigma\phi\omega$ παίρνουν τιμές από όλο το $\mathbb{R}$



5.

Οι άξονες

6.

Το ακτίνιο (rad)

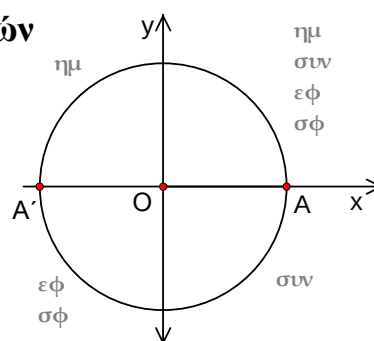
- Ακτίνιο λέγεται τόξο κύκλου, του οποίου το μήκος είναι ίσο με την ακτίνα του κύκλου.
- Αποδεικνύεται ότι, ο κύκλος σαν τόξο είναι $6,28 \dots \text{ rad} = 2 \cdot 3,14 \dots \text{ rad} = 2\pi \text{ rad}$
- Μετατροπή μοιρών σε rad και αντίστροφα $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$

7.

Το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών

Εξαρτάται από το τεταρτημόριο στο οποίο τελειώνει το τόξο

Σε όποιο τεταρτημόριο βλέπετε γραμμένο τον τριγωνομετρικό αριθμό, να ξέρετε ότι αυτός είναι θετικός.



8.**Για την απομνημόνευση**

Αν μπερδευτείς, θυμήσου ότι τα υπόριζα είναι 0, 1, 2, 3, 4.

	0°	30°	45°	60°	90°
ημ	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$

Για το συνημίτονο άλλαξε τη διάταξη.

ΣΧΟΛΙΑ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ**1.****Ο αριθμός π**

Ο αριθμός 3,14... (άπειρα δεκαδικά ψηφία) συμφωνάμε να γράφεται π .

2.**Μια ευκολία**

Στο εξής, θεωρούμε ότι όλα τα τόξα ανήκουν σε τριγωνομετρικό κύκλο.

3.**Διάκριση μεταξύ τόξου και μήκους του τόξου**

Γνωρίζουμε ότι, άλλο είναι «ευθύγραμμο τμήμα AB» και άλλο «μήκος ευθυγράμμου τμήματος AB»

Το πρώτο είναι ευθύγραμμο τμήμα, το δεύτερο είναι μη αρνητικός αριθμός.

Αντίστοιχα, άλλο είναι «τόξο ω » και άλλο «μήκος τόξου ω »

Το πρώτο είναι τόξο, το δεύτερο είναι μη αρνητικός αριθμός.

4.

Διάκριση μεταξύ των μοιρών ή rad ενός τόξου και του μήκους του

Κάθε τόξο είναι γνωστό από τις μοίρες του ή τα ακτίνιά του (rad).

Δηλαδή πόσο μέρος του κύκλου, στον οποίο ανήκει, καταλαμβάνει

.

Για να έχουμε το μήκος ενός τόξου, φανταζόμαστε ότι το αποκόβουμε από τον κύκλο του και το τεντώνουμε, δηλαδή το μετατρέπουμε σε ευθύγραμμο τμήμα.

Το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος που προέκυψε, είναι το μήκος του τόξου.

5.

Το τόξο 1°

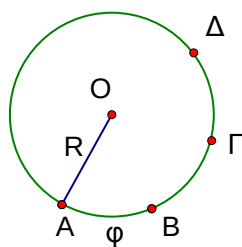
Ας φανταστούμε ότι με κάποιο μαγικό τρόπο χωρίζουμε έναν κύκλο σε 360 ίσα τόξα.

Το καθένα απ' αυτά λέγεται τόξο μιας μοίρας (1°).

Αποτέλεσμα αυτού είναι ότι ο κύκλος είναι τόξο 360° .

Γωνία 1° λέγεται η επίκεντρη γωνία που βαίνει στο τόξο 1° .

6.

Το τόξο 1 rad

Θεωρούμε κύκλο (O, R) .

Φανταζόμαστε τόξο $\widehat{AB} = \varphi$, το οποίο αν τεντώσουμε γίνεται τμήμα ίσο με την ακτίνα R .

Το τόξο φ είναι τόξο ενός rad. (ακτινίου)

Ορισμός: Τόξο 1 rad λέγεται το τόξο του οποίου το μήκος ισούται με την ακτίνα του κύκλου στον οποίο ανήκει.

Αν τοποθετήσουμε διαδοχικά τόξα ενός rad, μέχρι να συμπληρωθεί ο κύκλος θα χρειαστούμε $6,28... \text{ rad} = 2 \cdot 3,14... \text{ rad} = 2\pi \text{ rad} = 2\pi \text{ ακτίνια}$

Αποτέλεσμα αυτού είναι ότι ο κύκλος είναι τόξο $2\pi \text{ rad}$

Γωνία 1 rad λέγεται η επίκεντρη γωνία που βαίνει στο τόξο 1 rad.

7.

Μια παράλειψη που οδηγεί σε σύγχυση

Όταν εκφράζουμε τόξα σε μοίρες είμαστε υποχρεωμένοι να γράφουμε το σύμβολο της μοίρας.

$$\text{Π.χ} \quad \widehat{ΚΛ} = 60^\circ \quad \text{και} \quad \text{όχι} \quad \widehat{ΚΛ} = 60$$

$$\omega = 45^\circ \quad \text{και} \quad \text{όχι} \quad \omega = 45$$

Ενώ, όταν εκφράζουμε τόξα σε rad, παραλείπουμε να γράφουμε το σύμβολο rad, το οποίο βέβαια εννοείται.

$$\text{Π.χ} \quad \widehat{ΚΛ} = \pi \text{ rad} \quad \text{ή} \quad \widehat{ΚΛ} = \pi$$

$$\omega = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \quad \text{ή} \quad \omega = \frac{\pi}{3}$$

8.

Αντιστοιχία μοιρών - ακτινίων

μοίρες		rad	μοίρες		rad
0°	$\leftrightarrow$	0	90°	$\leftrightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
30°	$\leftrightarrow$	$\frac{\pi}{6}$	180°	$\leftrightarrow$	π
45°	$\leftrightarrow$	$\frac{\pi}{4}$	270°	$\leftrightarrow$	$\frac{3\pi}{2}$
60°	$\leftrightarrow$	$\frac{\pi}{3}$	360°	$\leftrightarrow$	2π

9.

Άξονας ημιτόνων και άξονας συνημιτόνων

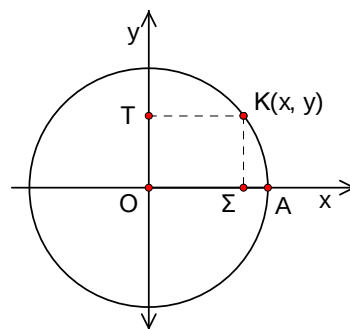
Έστω $K(x, y)$ σημείο του τριγωνομετρικού κύκλου και $\widehat{AK} = \omega$.

Επειδή $\eta\mu\omega = y = OT$ (με πρόσημο),

ο άξονας $y'y$ λέγεται και **άξονας ημιτόνων**.

Επειδή $\sigma\upsilon\eta\omega = x = OS$ (με πρόσημο),

ο άξονας $x'x$ λέγεται και **άξονας συνημιτόνων**.



10.**Το πεδίο ορισμού της εφω**

Για να ορίζεται η εφω, θα πρέπει η τελική πλευρά της γωνίας ω να μην είναι κατακόρυφη, δηλαδή $\omega \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$

Π.χ Δεν υπάρχει $\varepsilon\phi \frac{\pi}{2}, \quad \varepsilon\phi\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

11.**Το πεδίο ορισμού της σφω**

Για να ορίζεται η σφω, θα πρέπει η τελική πλευρά της γωνίας ω να μην είναι, οριζόντια, δηλαδή $\omega \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Π.χ Δεν υπάρχει $\sigma\phi 0, \quad \sigma\phi \pi$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ**1.**

Σε τι μας εξυπηρετεί να μελετάμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς τόξου στον τριγωνομετρικό κύκλο και όχι στο ορθογώνιο τρίγωνο ;

Απάντηση

Μας παρέχεται η δυνατότητα να χρησιμοποιούμε τόξα ή γωνίες που δεν είναι οξείες , αλλά οποιουδήποτε μεγέθους θετικές – αρνητικές – μηδέν.

2.

Πόσες μοίρες και πόσα rad είναι ο κύκλος , το ημικύκλιο , το τεταρτοκύκλιο;

Απάντηση

Ο κύκλος είναι	360°	ή	$2\pi \text{ rad}$	ή	2π
Το ημικύκλιο είναι	180°	ή	$\pi \text{ rad}$	ή	π
Το τεταρτοκύκλιο είναι	90°	ή	$\frac{\pi}{2} \text{ rad}$	ή	$\frac{\pi}{2}$

3.

Τι είναι τόξο 1° και τι τόξο 1 rad ;

Απάντηση

Σχόλια 5 και 6

4.

Ποιων τριγωνομετρικό αριθμό γνωστών οξείων γωνιών εκφράζουν οι αριθμοί

$$\frac{1}{2}, \quad 1, \quad \sqrt{3}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2};$$

Απάντηση

$$\frac{1}{2} = \eta\mu 30^\circ = \sigma\upsilon\nu 60^\circ$$

$$1 = \epsilon\phi 45^\circ = \sigma\phi 45^\circ$$

$$\sqrt{3} = \epsilon\phi 60^\circ = \sigma\phi 30^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \eta\mu 60^\circ = \sigma\upsilon\nu 30^\circ$$

Μάθε πολύ καλά τους τρ.
αριθμούς των
 $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

5.

Συμπληρώστε τις ισότητες

$$\eta\mu 0^\circ = \dots\dots \quad \eta\mu 90^\circ = \dots\dots \quad \eta\mu 180^\circ = \dots\dots \quad \eta\mu 270^\circ = \dots\dots$$

$$\sigma\upsilon\nu 0^\circ = \dots\dots \quad \sigma\upsilon\nu 90^\circ = \dots\dots \quad \sigma\upsilon\nu 180^\circ = \dots\dots \quad \sigma\upsilon\nu 270^\circ = \dots\dots$$

Απάντηση

$$\eta\mu 0^\circ = 0 \quad \eta\mu 90^\circ = 1 \quad \eta\mu 180^\circ = 0 \quad \eta\mu 270^\circ = -1$$

$$\sigma\upsilon\nu 0^\circ = 1 \quad \sigma\upsilon\nu 90^\circ = 0 \quad \sigma\upsilon\nu 180^\circ = -1 \quad \sigma\upsilon\nu 270^\circ = 0$$

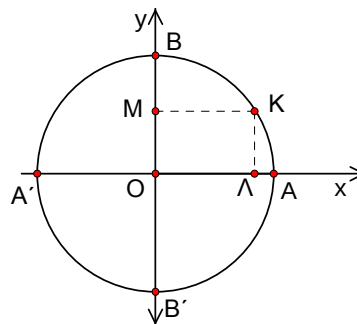
Αν δεν είμαστε σίγουροι, τα βρίσκουμε στον τριγωνομετρικό κύκλο

Ας δούμε δύο περιπτώσεις

Έστω $\widehat{AK} = \omega$ και Λ, M οι προβολές του K στους άξονες.

Τότε $\eta\mu\omega = OM$ (με πρόσημο)

και $\sigma\upsilon\nu\omega = OL$ (με πρόσημο)



α) όταν $\omega = 0^\circ$

$$\text{τότε } K \equiv A \Rightarrow M \equiv O \Rightarrow (OM) = 0 \Rightarrow \eta\mu 0^\circ = 0$$

β) όταν $\omega = 180^\circ$

$$\text{τότε } K \equiv A' \Rightarrow \Lambda \equiv A' \Rightarrow (OL) = -1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu 180^\circ = -1$$

6.

Δίνεται ότι $\eta\mu x = \frac{1}{2}$. Να βρείτε το τόξο x όταν $90^\circ < x < 180^\circ$.

Λύση

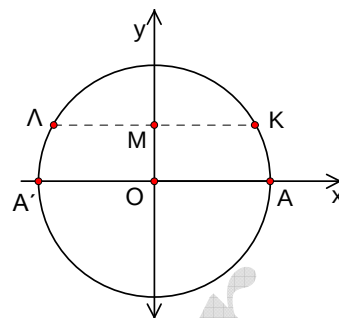
Επειδή $\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$, θεωρούμε $\widehat{AK} = 30^\circ$ και

φέρνουμε $KML \perp$ στον άξονα των ημιτόνων $y'y$.

Τότε $\widehat{LA'} = \widehat{AK} = 30^\circ$

Επειδή $90^\circ < x < 180^\circ$, θα είναι

$$x = \widehat{AL} = \widehat{AA'} - \widehat{LA'} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$



7.

Δίνεται ότι $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}$. Να βρείτε το τόξο x όταν $-90^\circ < x < 0^\circ$.

Λύση

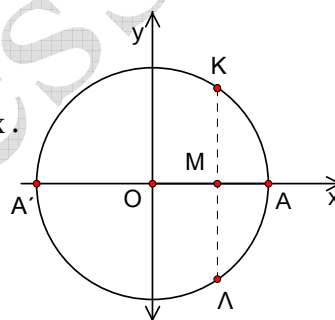
Επειδή $\sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}$, θεωρούμε $\widehat{AK} = 60^\circ$ και

φέρνουμε $KML \perp$ στον άξονα των συνημιτόνων $x'x$.

Τότε $\widehat{AL} = -\widehat{AK} = -30^\circ$

Επειδή $-90^\circ < x < 0^\circ$, θα είναι

$$x = \widehat{AL} = -\widehat{AK} = -30^\circ$$



8.

Σε τριγωνομετρικό κύκλο O , με αρχή όλων των τόξων το σημείο A , θεωρούμε το τόξο $\widehat{AK} = \frac{2\pi}{3}$. Ένα κινητό ξεκινάει από το A , διαγράφει τον κύκλο

περνώντας από το A τρεις φορές και σταματά στο K . Να βρείτε το τόξο που διαγράφει το κινητό σε μοίρες και σε rad

i) όταν το κινητό κινείται κατά τη θετική φορά

ii) όταν το κινητό κινείται κατά την αρνητική φορά.

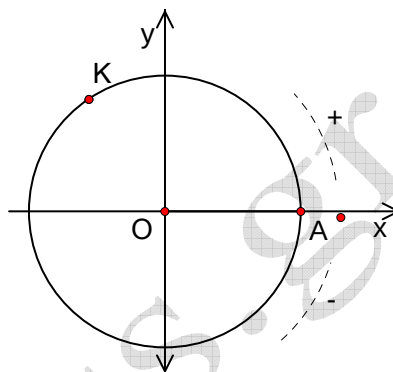
Λύση

i)

Θα διαγράψει τρεις θετικούς κύκλους $+\widehat{AK} =$

$$= 3 \cdot 2\pi + \frac{2\pi}{3} = 6\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{20\pi}{3} \text{ rad}$$

$$= \frac{20 \cdot 180^\circ}{3} = 20 \cdot 60^\circ = 1200^\circ$$



ii)

Θα διαγράψει τέσσερις αρνητικούς κύκλους $+\widehat{AK} =$

$$= 4 \cdot (-2\pi) + \frac{2\pi}{3} = -8\pi + \frac{2\pi}{3} = -\frac{22\pi}{3}$$

$$= -\frac{22 \cdot 180^\circ}{3} = -22 \cdot 60^\circ = -1320^\circ$$

9.

Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\Pi = \varepsilon\phi^2 720^\circ - \sigma\upsilon\nu^2 1110^\circ + \eta\mu^2 1485^\circ$

Λύση

$$720^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 0^\circ \Rightarrow \varepsilon\phi 720^\circ = \varepsilon\phi 0^\circ = 0$$

$$1110^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 30^\circ \Rightarrow \sigma\upsilon\nu 1110^\circ = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$1485^\circ = 4 \cdot 360^\circ + 45^\circ \Rightarrow \eta\mu 1485^\circ = \eta\mu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Pi = 0^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} + \frac{2}{4} = -\frac{1}{4}$$

Ο διαιρετέος
ισούται με το
διαιρέτη επί το
πηλίκο συν το
υπόλοιπο

Αφαίρεση
ακέραιων
κύκλων

10.

Σε τριγωνομετρικό κύκλο O , με αρχή όλων των τόξων το σημείο A , δίνονται τα τόξα $\widehat{AK} = \frac{13\pi}{6}$ και $\widehat{AL} = \frac{23\pi}{6}$.

i) Να τοποθετήσετε τα σημεία K, Λ στον τριγωνομετρικό κύκλο.

ii) Να βρείτε το μήκος του τμήματος $K\Lambda$.

Λύση

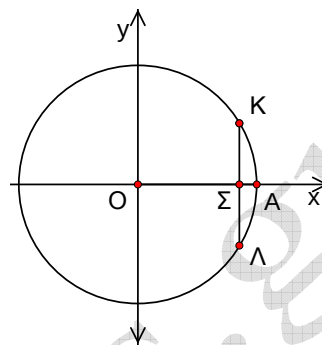
i)

$$\widehat{AK} = \frac{13\pi}{6} = \frac{12\pi + \pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{6}$$

Άρα το K είναι πέρας και του τόξου $\frac{\pi}{6}$

$$\widehat{AL} = \frac{23\pi}{6} = \frac{24\pi - \pi}{6} = 4\pi - \frac{\pi}{6}$$

Άρα το Λ είναι πέρας και του τόξου $-\frac{\pi}{6}$



ii)

Τα σημεία K, Λ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x \Rightarrow K\Lambda \parallel y'y$

Έστω Σ η τομή των $K\Lambda$, $x'x$.

$$\text{Τότε } (\Lambda K) = 2(\Sigma K) = 2\eta\mu\frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$